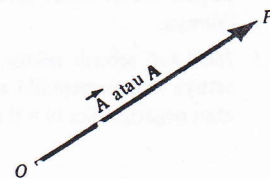


VEKTOR adalah besaran yang mempunyai besar dan arah, seperti perpindahan (displacement), kecepatan, gaya dan percepatan.

Secara grafis, vektor digambarkan oleh sebuah anak panah OP (Gamb.1) yang mendefinisikan arahnya sedangkan besarnya dinyatakan oleh panjang anak panah. Ujung pangkal O dari anak panah disebut *titik asal* atau *titik pangkal* vektor dan ujung kepala P disebut *titik terminal* atau *terminus*.

Secara analitis, vektor dilambangkan oleh sebuah huruf dengan anak panah di atasnya, seperti \vec{A} dalam Gamb. 1 dan besarnya dinyatakan oleh $|\vec{A}|$ atau A . Dalam karya cetakan, huruf dengan cetakan tebal seperti \mathbf{A} , dipergunakan untuk menyatakan vektor \vec{A} sedangkan $|\mathbf{A}|$ atau A menyatakan besarnya. Dalam buku ini akan kami pergunakan notasi huruf dengan cetakan tebal ini. Vektor OP juga dinyatakan sebagai \vec{OP} atau \mathbf{OP} ; dalam hal ini maka besarnya akan kita nyatakan dengan $|\vec{OP}|$, $|\mathbf{OP}|$ atau OP .

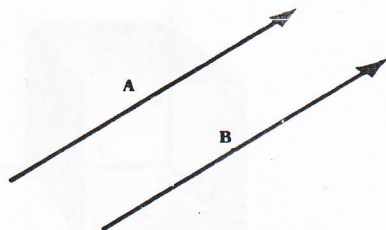


Gambar 1

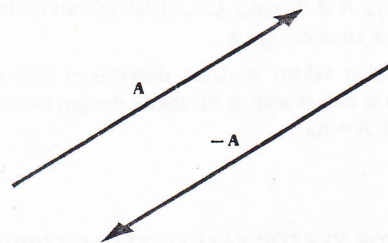
SKALAR adalah besaran yang mempunyai besar tetapi tanpa arah, seperti massa, panjang, waktu, suhu dan sebarang bilangan riil. Skalar dinyatakan oleh huruf-huruf biasa seperti dalam aljabar elementer. Operasi-operasi dengan skalar mengikuti aturan-aturan yang sama seperti halnya dalam aljabar elementer.

ALJABAR VEKTOR. Operasi-operasi penjumlahan, pengurangan dan perkalian yang lazim dalam aljabar dari bilangan-bilangan atau skalar-skalar, dengan definisi yang sesuai, dapat diperluas kedalam aljabar dari vektor-vektor. Definisi-definisi berikut adalah mendasar.

1. Dua buah vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} sama jika mereka memiliki besar dan arah yang sama tanpa memandang kedudukan titik-titik awalnya. Jadi $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ dalam Gamb. 2.
2. Sebuah vektor yang arahnya berlawanan dengan vektor \mathbf{A} tetapi memiliki besar yang sama dinyatakan oleh $-\mathbf{A}$ (Gamb. 3).



Gambar 2

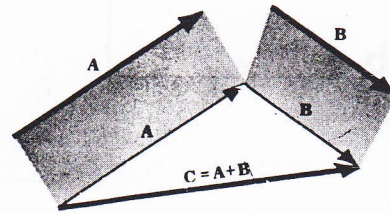


Gambar 3

3. Jumlah atau *resultan* dari vektor-vektor A dan B adalah sebuah vektor C yang dibentuk dengan menempatkan titik awal dari B pada titik terminal dari A dan kemudian menghubungkan titik awal dari A dengan titik terminal dari B (Gamb. 4). Jumlah ini ditulis $A + B$, yakni, $C = A + B$.

Definisi ini ekuivalen dengan *hukum jajaran genjang* untuk penjumlahan vektor (lihat Soal 3).

Perluasan ke dalam penjumlahan lebih daripada dua buah vektor adalah langsung (lihat Soal 4).



Gambar 4

4. Selisih dari vektor-vektor A dan B yang dinyatakan oleh $A - B$, adalah vektor C yang apabila ditambahkan pada B menghasilkan vektor A . Secara ekuivalen, $A - B$ dapat didefinisikan sebagai jumlah $A + (-B)$.

Jika $A = B$, maka $A - B$ didefinisikan sebagai *vektor nol* atau *vektor kosong* dan dinyatakan oleh simbol 0 atau secara singkat 0 . Besarnya nol dan tak memiliki arah yang tertentu. Vektor yang tak nol adalah *vektor sejati* (proper vector). Semua vektor akan dipandang sejati kecuali bila ada pernyataan lainnya.

5. Hasil kali sebuah vektor A dengan sebuah skalar m adalah sebuah vektor mA yang besarnya $|m|$ kali besarnya A dan memiliki arah yang sama atau berlawanan dengan A , bergantung pada apakah m positif atau negatif. Jika $m = 0$ maka mA adalah sebuah vektor nol.

HUKUM-HUKUM ALJABAR VEKTOR. Jika A , B dan C adalah vektor-vektor dan m dan n skalar-skalar, maka

- | | |
|--------------------------------|-----------------------------------|
| 1. $A + B = B + A$ | Hukum Komutatif untuk Penjumlahan |
| 2. $A + (B + C) = (A + B) + C$ | Hukum Asosiatif untuk Penjumlahan |
| 3. $mA = Am$ | Hukum Komutatif untuk Perkalian |
| 4. $m(nA) = (mn)A$ | Hukum Asosiatif untuk Perkalian |
| 5. $(m + n)A = mA + nA$ | Hukum Distributif |
| 6. $m(A + B) = mA + mB$ | Hukum Distributif |

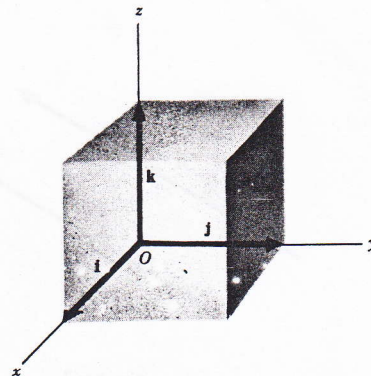
Perhatikan bahwa dalam hukum-hukum ini hanya perkalian sebuah vektor dengan satu atau lebih skalar-skalar yang dipergunakan. Dalam Bab 2, akan didefinisikan hasil kali dari vektor-vektor.

Hukum-hukum ini memungkinkan kita memperlakukan persamaan-persamaan vektor dengan cara yang sama seperti persamaan-persamaan aljabar biasa. Sebagai misal, jika $A + B = C$ maka dengan menukarkan tempat $A = C - B$.

VEKTOR SATUAN adalah sebuah vektor yang besarnya satu. Jika A adalah sebuah vektor yang besarnya $A \neq 0$, maka A/A adalah sebuah vektor satuan yang arahnya sama dengan A .

Setiap vektor A dapat dinyatakan oleh sebuah vektor satuan a dalam arah A dikalikan dengan besarnya A . Dalam simbol, $A = Aa$.

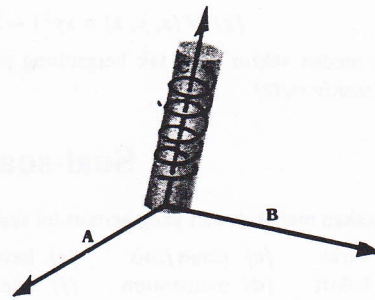
VEKTOR-VEKTOR SATUAN TEGAK LURUS i, j, k . Himpunan vektor-vektor satuan yang penting adalah yang arahnya menurut sumbu-sumbu x , y dan z positif dari sistem koordinat tegak lurus ruang tiga dimensi. Masing-masingnya dinyatakan oleh i, j dan k (Gamb. 5).



Gambar 5

Kita akan menggunakan *sistem koordinat tegak-lurus aturan tangan kanan* kecuali ada pernyataan lainnya. Sistem demikian dinamakan dari kenyataan bahwa sebuah sekerup bergalur kanan yang diputar 90° dari Ox ke Oy akan maju dalam arah sumbu z positif, seperti dalam Gambar 5 di atas.

Pada umumnya, tiga buah vektor A , B dan C yang titik pangkalnya berimpit dan tak - *koplanar* (*coplanar*), yakni tidak terletak pada atau sejajar bidang yang sama disebut membentuk sebuah *sistem tangan kanan* atau *sistem dekstral* jika sebuah sekerup bergalur kanan yang diputar dengan sudut yang lebih kecil daripada 180° dari A ke B akan maju dalam arah C seperti diperlihatkan dalam Gamb. 6.



Gambar 6

KOMPONEN-KOMPONEN SEBUAH VEKTOR. Setiap vektor A dalam ruang 3 dimensi dapat digambarkan dengan titik pangkal pada titik asal O dari sistem koordinat tegak-lurus (Gamb. 7). Misalkan (A_1, A_2, A_3) koordinat-koordinat tegak-lurus titik terminal dari vektor A dengan titik asal pada O . Vektor-vektor $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ dan $A_3\mathbf{k}$ disebut *vektor-vektor komponen tegak lurus* atau secara singkat *vektor-vektor komponen* dari A berturut-turut dalam arah-arah x , y dan z .

A_1, A_2, A_3 disebut *komponen-komponen tegak-lurus* atau secara singkat *komponen-komponen* dari A berturut-turut dalam arah-arah x , y dan z .

Jumlah atau resultan dari $A_1\mathbf{i}$, $A_2\mathbf{j}$ dan $A_3\mathbf{k}$ adalah vektor A sehingga kita dapat menulis

$$\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$$

Besar dari A adalah

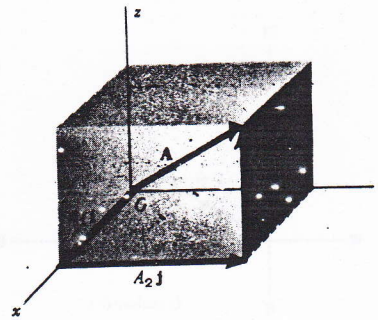
$$A = |\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

Pada khususnya, *vektor posisi* atau *vektor jejari* (*Radius vector*) \mathbf{r} dari O ke titik (x, y, z) ditulis

$$\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

dan besarnya

$$r = |\mathbf{r}| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$



Gambar 7

MEDAN SKALAR. Jika pada tiap-tiap titik (x, y, z) dari suatu daerah R dalam ruang dikaitkan sebuah bilangan atau skalar $\phi(x, y, z)$, maka ϕ disebut *fungsi skalar dari kedudukan* atau *fungsi titik skalar* (scalar point function) dan kita mengatakan bahwa sebuah *medan skalar* ϕ telah didefinisikan dalam R .

Contoh-contoh. (1) Temperatur pada setiap titik di dalam atau di atas permukaan bumi pada suatu saat tertentu mendefinisikan sebuah medan skalar.

(2) $\phi(x, y, z) = x^3y - z^2$ mendefinisikan sebuah medan skalar.

Sebuah medan skalar yang tak bergantung pada waktu disebut medan skalar *stasioner* atau *keadaan tunak*.

MEDAN VEKTOR. Jika pada tiap-tiap titik (x, y, z) dari suatu daerah R dalam ruang dikaitkan sebuah vektor $\mathbf{V}(x, y, z)$, maka \mathbf{V} disebut *fungsi vektor dari kedudukan* atau *fungsi titik vektor* (vector point function) dan kita dapat mengatakan bahwa sebuah *medan vektor* \mathbf{V} telah didefinisikan dalam R .

Contoh-contoh. (1) Jika kecepatan pada setiap titik (x, y, z) dalam sebuah fluida yang sedang bergerak diketahui pada suatu saat tertentu, maka sebuah medan vektor terdefiniskan.

(2) $\mathbf{V}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} - 2yz^3\mathbf{j} + x^2z\mathbf{k}$ mendefinisikan sebuah medan vektor.

Sebuah medan vektor yang tak bergantung pada waktu disebut sebuah medan vektor *stasioner* atau *keadaan tetap* (*steady state*).

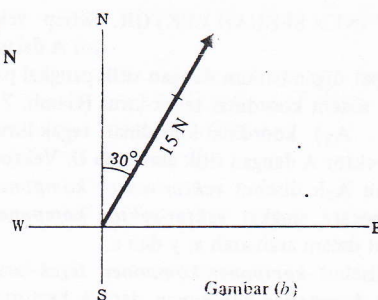
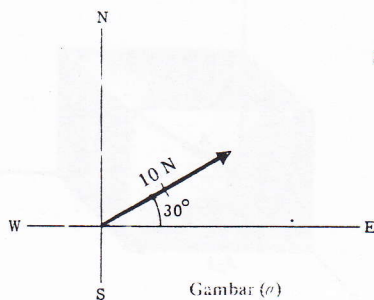
Soal-soal yang Dipecahkan

1. Nyatakan manakah dari yang berikut ini skalar dan manakah yang vektor.

- | | | | | |
|------------|-----------------|---------------|------------|-------------------------------|
| (a) berat | (c) panas jenis | (e) kerapatan | (g) volume | (i) kecepatan |
| (b) kalori | (d) momentum | (f) energi | (h) jarak | (j) intensitas medan magnetik |

Jawab. (a) vektor (c) skalar (e) skalar (g) skalar (i) skalar
 (b) skalar (d) vektor (f) skalar (h) skalar (j) vektor

2. Gambarkan secara grafis (a) sebuah gaya 10 N yang arahnya 30° disebelah utara dari timur
 (b) sebuah gaya 15 N yang arahnya 30° disebelah timur dari utara.



Pilih satuan dari besarnya seperti yang diperlihatkan. Vektor-vektor yang ditanyakan adalah yang digambarkan di atas.

3. Sebuah mobil bergerak ke arah utara sejauh 3 km, kemudian 5 km ke arah timur laut. Gambarkan perpindahan ini secara grafis dan tentukan vektor perpindahan resultannya (a) secara grafis, (b) secara analitis.

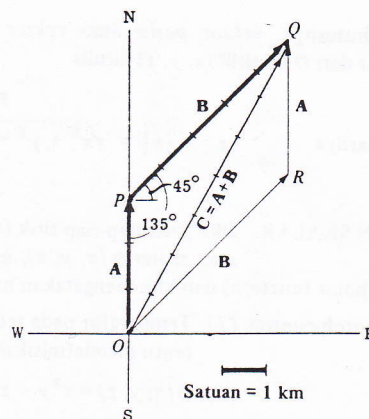
Vektor \overrightarrow{OP} atau \mathbf{A} menggambarkan perpindahan 3 km ke arah utara.

Vektor \overrightarrow{PQ} atau \mathbf{B} menggambarkan perpindahan 5 km ke arah timur laut.

Vektor \overrightarrow{OQ} atau \mathbf{C} menggambarkan vektor perpindahan resultan atau jumlah vektor-vektor \mathbf{A} dan \mathbf{B} , yakni $\mathbf{C} = \mathbf{A} + \mathbf{B}$. Ini adalah *hukum segitiga* dari penjumlahan vektor.

Vektor resultan \overrightarrow{OQ} dapat juga diperoleh dengan membentuk diagonal jajaran genjang $OPQR$ yang memiliki vektor-vektor $\overrightarrow{OP} = \mathbf{A}$ dan \overrightarrow{OR} (yang sama dengan vektor \overrightarrow{PQ} atau \mathbf{B}) sebagai sisi-sisinya. Ini adalah *hukum jajaran genjang* dari penjumlahan vektor.

(a) *Penentuan resultan secara grafis.* Letakkan skala satuan 1 km pada vektor \overrightarrow{OQ} untuk memperoleh besar 7,4 km (kurang-lebih). Buat sudut $\angle EOQ = 61,5^\circ$ dengan menggunakan busur derajat. Maka vektor \overrightarrow{OQ} besarnya 7,4 km dan arahnya $61,5^\circ$ di sebelah utara dari timur.



(b) *Penentuan resultan secara analitis.* Perhatikan segitiga OPQ . Bila besar dari \mathbf{A} , \mathbf{B} , \mathbf{C} dinyatakan oleh A , B , C maka kita peroleh dari hukum cosinus.

$$C^2 = A^2 + B^2 - 2AB \cos \angle OPQ = 3^2 + 5^2 - 2(3)(5) \cos 135^\circ = 34 + 15\sqrt{2} = 55,21$$

jadi $C = 7,43$ (kurang-lebih)

Dari hukum sinus, $\frac{A}{\sin \angle OQP} = \frac{C}{\sin \angle OPQ}$ Maka

$$\sin \angle OQP = \frac{A \sin \angle OPQ}{C} = \frac{3(0,707)}{7,43} = 0,2855 \quad \text{dan} \quad \angle OQP = 16^\circ 35'$$

Jadi vektor \mathbf{OQ} besarnya 7,43 km dan arahnya $(45^\circ + 16^\circ 35') = 61^\circ 35'$ disebelah utara dari timur.

4. Carilah jumlah atau resultan perpindahan-perpindahan berikut : A, 10 m barat laut; B 20 m 30° disebelah utara dari timur; C, 35 m ke selatan. Lihat Gamb. (a) dibawah.

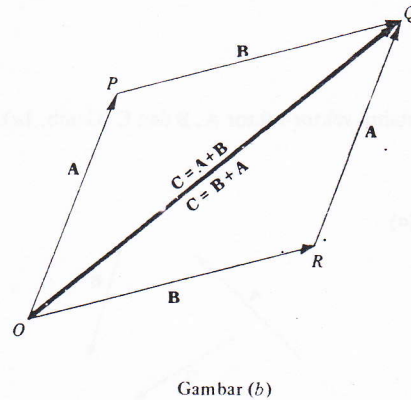
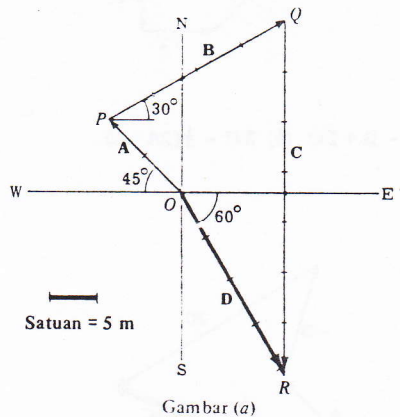
Pada titik terminal A, tempatkan titik pangkal B.

Pada titik terminal B, tempatkan titik pangkal C.

Resultan \mathbf{D} dibentuk dengan menghubungkan titik pangkal A dengan titik terminal C, yakni $\mathbf{D} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$.

Secara grafis, resultan diukur mempunyai besar 4,1 satuan = 20,5 m dan arah 60° disebelah selatan dari timur.

Untuk metode penjumlahan vektor secara analitis dari 3 atau lebih vektor-vektor lihat Soal 26.



5. Perhatikan bahwa penjumlahan vektor adalah komutatif, yakni $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.
Lihat Gamb. (b) di atas.

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} &= \mathbf{OQ} \quad \text{atau} \quad \mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}, \\ \text{dan} \quad \mathbf{OR} + \mathbf{RQ} &= \mathbf{OQ} \quad \text{atau} \quad \mathbf{B} + \mathbf{A} = \mathbf{C}. \end{aligned}$$

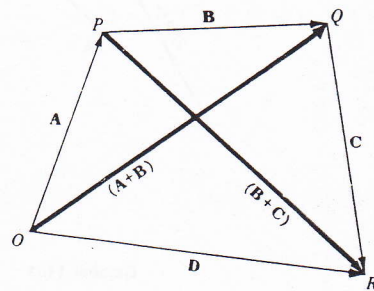
Maka $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$.

6. Perhatikan bahwa penjumlahan vektor adalah asosiatif, yakni $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{OP} + \mathbf{PQ} &= \mathbf{OQ} = (\mathbf{A} + \mathbf{B}), \\ \text{dan} \quad \mathbf{PQ} + \mathbf{QR} &= \mathbf{PR} = (\mathbf{B} + \mathbf{C}). \\ \mathbf{OP} + \mathbf{PR} &= \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{yakni} \quad \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{D}. \\ \mathbf{OQ} + \mathbf{QR} &= \mathbf{OR} = \mathbf{D}, \quad \text{yakni} \quad (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{D}. \end{aligned}$$

Maka $\mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = (\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C}$.

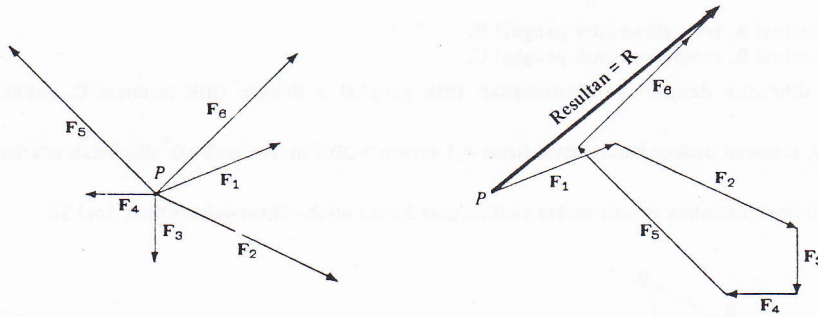
Perluasan dari hasil-hasil Soal 5 dan 6 memperlihatkan bahwa urutan penjumlahan vektor-vektor tidak penting.



7. Gaya-gaya F_1, F_2, \dots, F_6 bekerja pada obyek P seperti diperlihatkan. Gaya apakah yang diperlukan untuk mencegah P bergerak?

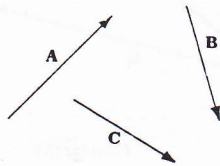
Karena urutan penjumlahan vektor tidak penting, kita dapat memulai dengan sebarang vektor, katakan F_1 . Pada F_1 tambahkan F_2 kemudian F_3 dan seterusnya. Vektor yang digambarkan dari titik awal F_1 ke titik terminal F_6 adalah resultan R , yakni $R = F_1 + F_2 + F_3 + F_4 + F_5 + F_6$.

Gaya yang dibutuhkan untuk mencegah P bergerak adalah $-R$ yang mana adalah sebuah vektor yang sama besarnya dengan vektor R tetapi berlawanan arah dan seringkali disebut *penyeimbang (equilibrant)*.

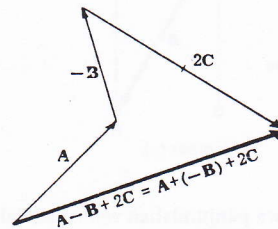


8. Diketahui vektor-vektor A, B dan C (Gambar 1a), gambarkan (a) $A - B + 2C$ (b) $3C - \frac{1}{2}(2A - B)$.

(a)

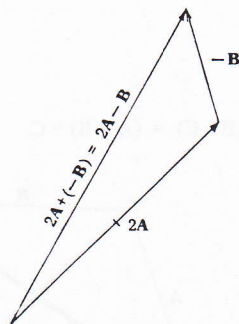


Gambar 1 (a)

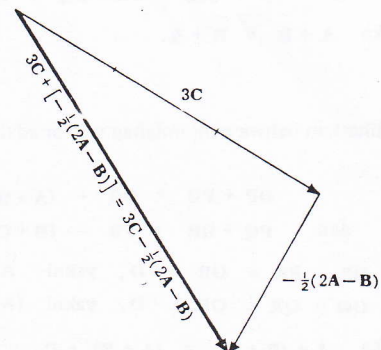


Gambar 2 (b)

(b)



Gambar 1 (b)



Gambar 2 (b)

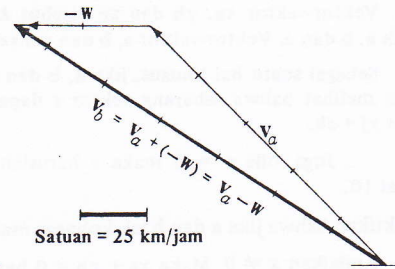
9. Sebuah pesawat-terbang bergerak dalam arah barat-laut dengan laju 125 km/jam relatif terhadap tanah, disebabkan terdapat angin barat dengan laju 50 km/jam relatif terhadap tanah. Berapakah laju dan dalam arah manakah pesawat akan bergerak jika tidak terdapat angin ?

Misalkan: W = kecepatan angin

V_a = kecepatan pesawat dengan angin

V_b = kecepatan pesawat tanpa angin

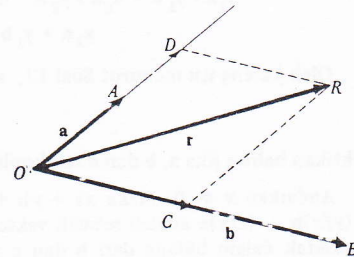
Maka $V_a = V_b + W$ atau $V_b = V_a - W = V_a + (-W)$



V_b besarnya 6,5 satuan = 163 km/jam dan berarah 33° di sebelah utara dari barat.

10. Diketahui dua buah vektor a dan b yang tak-kolinear, carilah suatu pernyataan untuk sebarang vektor r yang terletak dalam bidang yang dibentuk oleh a dan b .

Vektor-vektor tak-kolinear (non-colinear) adalah vektor-vektor yang tak sejajar dengan garis yang sama. Oleh karena itu apabila titik-titik pangkalnya berimpitan, mereka menentukan sebuah bidang. Misalkan r sebarang vektor yang terletak dalam bidang dari a dan b dan titik pangkalnya berimpitan dengan titik-titik pangkalnya a dan b di O . Dari titik terminal R vektor r , gambarkan garis-garis yang sejajar vektor-vektor a dan b dan lengkapi jajaran-genjang $ODRC$ dengan memperpanjang garis-garis kerja dari a dan b bila perlu. Dari gambar di samping



$$OD = x(OA) = xa, \text{ di mana } x \text{ sebuah skalar}$$

$$OC = y(OB) = yb, \text{ di mana } y \text{ sebuah skalar}$$

Tetapi menurut hukum jajaran-genjang dari penjumlahan vektor

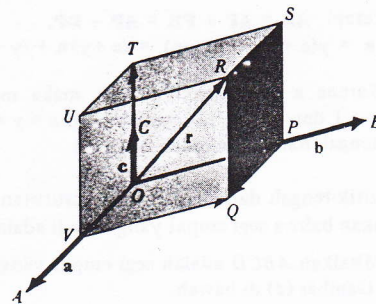
$$OR = OD + OC \text{ atau } r = xa + yb$$

yang mana adalah pernyataan yang diinginkan. Vektor-vektor xa dan yb disebut *komponen-komponen vektor* r masing-masing dalam arah-arah a dan b . Skalar-skalar x dan y dapat berharga positif atau negatif tergantung pada orientasi-orientasi relatif dari vektor-vektor. Dari cara penggambaran ini, jelaslah bahwa x dan y adalah unik untuk a , b , dan r yang diberikan. Vektor-vektor a dan b disebut *vektor-vektor basis* dalam bidang.

11. Diketahui tiga buah vektor a , b dan c yang tak-koplanar, carilah suatu pernyataan untuk sebarang vektor r dalam ruang tiga dimensi.

Vektor-vektor tak-koplanar adalah vektor-vektor yang tak sejajar dengan bidang yang sama. Jadi apabila titik-pangkalnya berimpitan maka mereka tak terletak dalam bidang yang sama.

Misalkan r sebarang vektor dalam ruang yang titik-pangkalnya berimpitan dengan titik-titik pangkal a , b dan c di O . Melalui titik terminal r gambarkan bidang-bidang yang masing-masingnya sejajar dengan bidang-bidang yang ditentukan oleh a dan b , b dan c , dan a dan c ; dan lengkapi jajaran-genjang ruang $PQRSTUV$ dengan memperpanjang garis-garis kerja dari a , b dan c bila perlu. Dari gambar disamping,



$$OV = x(OA) = xa \text{ di mana } x \text{ sebuah skalar}$$

$$OP = y(OB) = yb \text{ di mana } y \text{ sebuah skalar}$$

$$OT = z(OC) = zc \text{ di mana } z \text{ sebuah skalar}$$

Tetapi $OR = OV + VQ + QR = OV + OP + OT$ atau $r = xa + yb + zc$.

Dari cara menggambar, jelas bahwa x , y dan z adalah unik untuk a , b , c dan r yang diberikan.

Vektor-vektor xa , yb dan zc disebut *komponen-komponen vektor* dari r masing-masing dalam arah a , b dan c . Vektor-vektor a , b dan c disebut *vektor-vektor basis* dalam ruang tiga-dimensi.

Sebagai suatu hal khusus, jika a , b dan c adalah vektor-vektor satuan i , j dan k , yang saling tegak-lurus, kita melihat bahwa sebarang vektor r dapat dinyatakan secara unik dalam i , j , k melalui pernyataan $r = xi + yj + zk$.

Juga, bila $c = 0$ maka r haruslah terletak dalam bidang dari a dan b sehingga diperoleh hasil dari Soal 10.

12. Buktikan bahwa jika a dan b tak-kolinear maka $xa + yb = 0$ menunjukkan $x = y = 0$.

Andaikan $x \neq 0$. Maka $xa + yb = 0$ berarti $xa = -yb$ atau $a = -(y/x)b$, yang berarti a dan b haruslah sejajar dengan garis yang sama (kolinear) yang mana bertentangan dengan hipotesis. Jadi $x = 0$; maka $yb = 0$ yang mana darinya $y = 0$.

13. Jika $x_1a + y_1b = x_2a + y_2b$, di mana a dan b tak-kolinear, maka $x_1 = x_2$ dan $y_1 = y_2$.

$$x_1a + y_1b = x_2a + y_2b \text{ dapat ditulis}$$

$$x_1a + y_1b - (x_2a + y_2b) = 0 \text{ atau } (x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b = 0.$$

Oleh karena itu menurut Soal 12, $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$ atau $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$.

14. Buktikan bahwa jika a , b dan c tak-koplanar maka $xa + yb + zc = 0$ menunjukkan $x = y = z = 0$.

Andaikan $x \neq 0$. Maka $xa + yb + zc = 0$ berarti $xa = -yb - zc$ atau $a = -(y/x)b - (z/x)c$. Tetapi $-(y/x)b - (z/x)c$ adalah sebuah vektor yang terletak dalam bidang dari b dan c (Soal 10), yang berarti, a terletak dalam bidang dari b dan c yang mana jelas bertentangan dengan hipotesis bahwa a , b dan c tak-koplanar. Karena itu $x = 0$. Dengan penalaran yang sama didapatkan kontradiksi-kontradiksi untuk pengandaian $y \neq 0$ dan $z \neq 0$.

15. Jika $x_1a + y_1b + z_1c = x_2a + y_2b + z_2c$, di mana a , b dan c tak-koplanar, maka $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

Persamaan di atas dapat ditulis $(x_1 - x_2)a + (y_1 - y_2)b + (z_1 - z_2)c = 0$.

Maka dari Soal 14, $x_1 - x_2 = 0$, $y_1 - y_2 = 0$, $z_1 - z_2 = 0$ atau $x_1 = x_2$, $y_1 = y_2$, $z_1 = z_2$.

16. Buktikan bahwa diagonal-diagonal dari jajaran-genjang saling memotong di tengah-tengahnya.

Misalkan $ABCD$ adalah jajaran-genjang yang diketahui dengan diagonal-diagonalnya berpotongan di P .

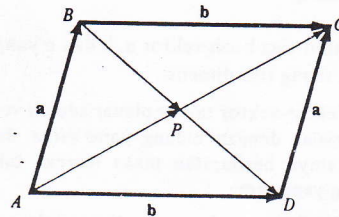
Karena $\vec{BD} + \vec{a} = \vec{b}$, $\vec{BD} = \vec{b} - \vec{a}$. Maka $\vec{BP} = x(\vec{b} - \vec{a})$.

Karena $\vec{AC} = \vec{a} + \vec{b}$, $\vec{AP} = y(\vec{a} + \vec{b})$.

Tetapi $\vec{AB} = \vec{AP} + \vec{PB} = \vec{AP} - \vec{BP}$,

yakni $\vec{a} = y(\vec{a} + \vec{b}) - x(\vec{b} - \vec{a}) = (x + y)\vec{a} + (y - x)\vec{b}$.

Karena \vec{a} dan \vec{b} tak-kolinear, maka menurut Soal 13, $x + y = 1$ dan $y - x = 0$, yang berarti $x = y = \frac{1}{2}$ dan P adalah titik-tengah dari kedua buah diagonal.



17. Jika titik-tengah dari sisi-sisi yang berurutan dari sebarang segi empat dihubungkan oleh garis-garis lurus, buktikan bahwa segi empat yang terjadi adalah sebuah jajaran-genjang.

Misalkan $ABCD$ adalah segi empat yang diketahui dan P , Q , R , S titik-titik tengah dari sisi-sisinya. Pandang Gambar (a) di bawah.

$$\text{Maka } \vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}), \quad \vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}), \quad \vec{RS} = \frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}), \quad \vec{SP} = \frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}).$$

Tetapi $\vec{a} + \vec{b} + \vec{c} + \vec{d} = \vec{0}$. Maka

$$\vec{PQ} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}) = -\frac{1}{2}(\vec{c} + \vec{d}) = \vec{SR} \quad \text{dan} \quad \vec{QR} = \frac{1}{2}(\vec{b} + \vec{c}) = -\frac{1}{2}(\vec{d} + \vec{a}) = \vec{PS}$$

Jadi sisi-sisi yang berlawanan adalah sama dan sejajar jadi $PQRS$ adalah sebuah jajaran genjang.

18. Misalkan p_1, p_2, p_3 adalah titik-titik tetap relatif terhadap titik-asal O dan r_1, r_2, r_3 vektor-vektor kedudukan masing-masing titik dari O . Perhatikan bahwa, jika persamaan vektor $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 0$ berlaku terhadap titik asal O maka ia akan berlaku terhadap sebarang titik-asal lainnya O' jika dan hanya jika $a_1 + a_2 + a_3 = 0$.

Misalkan $r_1', r_2',$ dan r_3' adalah vektor-vektor kedudukan dari P_1, P_2 dan P_3 terhadap O' dan v adalah vektor posisi dari O' terhadap O . Kita mencari persyaratan-persyaratan yang dibawahnya persamaan $a_1 r_1' + a_2 r_2' + a_3 r_3' = 0$ akan berlaku dalam kerangka acuan yang baru.

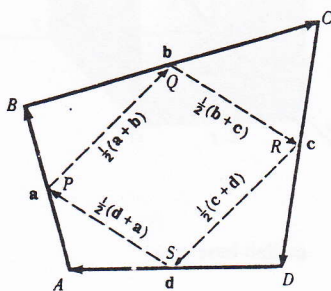
Dari Gamb. (b) di bawah, jelas bahwa $r_1 = v + r_1', r_2 = v + r_2', r_3 = v + r_3'$ sehingga $a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 = 0$ menjadi

$$\begin{aligned} a_1 r_1 + a_2 r_2 + a_3 r_3 &= a_1(v + r_1') + a_2(v + r_2') + a_3(v + r_3') \\ &= (a_1 + a_2 + a_3)v + a_1 r_1' + a_2 r_2' + a_3 r_3' = 0 \end{aligned}$$

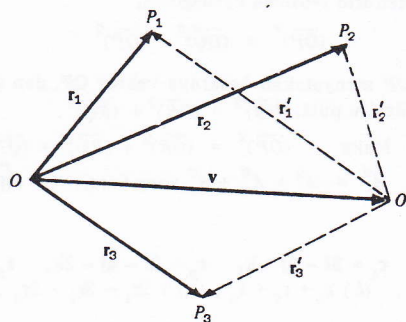
Hasil $a_1 r_1' + a_2 r_2' + a_3 r_3' = 0$ akan berlaku jika dan hanya jika

$$(a_1 + a_2 + a_3)v = 0, \text{ yang berarti } a_1 + a_2 + a_3 = 0.$$

Hasil ini dapat diperluas.



Gambar (a)



Gambar (b)

19. Carilah persamaan sebuah garis-lurus yang melalui dua buah titik A dan B yang diketahui memiliki vektor-vektor kedudukan a dan b terhadap sebuah titik asal O .

Misalkan r adalah vektor kedudukan dari sebarang titik P pada garis yang melalui A dan B .

Dari gambar di samping,

$$\begin{aligned} \text{OA} + \text{AP} &= \text{OP} \quad \text{atau} \quad a + \text{AP} = r, \text{ yakni } \text{AP} = r - a \\ \text{dan } \text{OA} + \text{AB} &= \text{OB} \quad \text{atau} \quad a + \text{AB} = b, \text{ yakni } \text{AB} = b - a \end{aligned}$$

Karena AP dan AB kolinear, $\text{AP} = t \text{AB}$ atau $r - a = t(b - a)$. Maka persamaan yang dikehendaki adalah

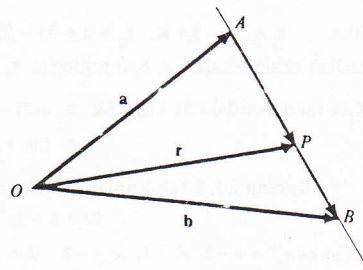
$$r = a + t(b - a) \quad \text{atau} \quad r = (1 - t)a + tb$$

Bila persamaannya dituliskan $(1 - t)a + tb - r = 0$, jumlah dari koefisien-koefisiennya a, b dan r adalah $1 - t + t - 1 = 0$. Oleh karena itu menurut Soal 18 terlihat bahwa titik P selalu berada pada garis yang menghubungkan A dan B dan tidak bergantung pada pemilihan titik-asal O , yang mana memang seharusnya demikian.

Metode Lain. Karena AP dan BP kolinear, maka untuk skalar-skalar m dan n kita peroleh:

$$m\text{AP} = n\text{PB} \quad \text{atau} \quad m(r - a) = n(b - r)$$

$$\text{Pecahkan, } r = \frac{ma + nb}{m + n} \quad \text{yang disebut bentuk simetrik.}$$



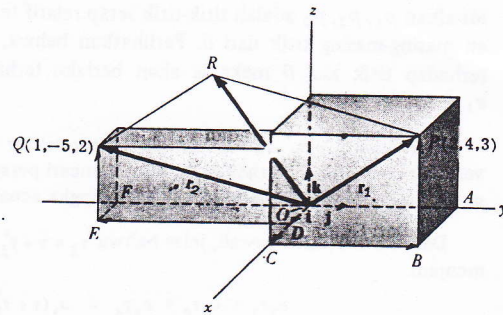
0. (a) Carilah vektor-vektor kedudukan \mathbf{r}_1 dan \mathbf{r}_2 untuk titik-titik $P(2, 4, 3)$ dan $Q(1, -5, 2)$ dari sebuah sistem koordinat tegak-lurus, dinyatakan dalam vektor-vektor satuan $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. (b) Tentukan secara grafis dan analitis resultan dari vektor-vektor kedudukan ini.

$$(a) \quad \mathbf{r}_1 = \mathbf{OP} = \mathbf{OC} + \mathbf{CB} + \mathbf{BP} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

$$\mathbf{r}_2 = \mathbf{OQ} = \mathbf{OD} + \mathbf{DE} + \mathbf{EQ} = \mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

- (b) Secara grafis, resultan dari \mathbf{r}_1 dan \mathbf{r}_2 diperoleh sebagai diagonal \mathbf{OR} dari jajaran-genjang \mathbf{OPRQ} . Secara analitis, resultan dari \mathbf{r}_1 dan \mathbf{r}_2 diberikan oleh

$$\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) + (\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$$



1. Buktikan bahwa besarnya A dari vektor $\mathbf{A} =$

$$A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k} \text{ adalah } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}$$

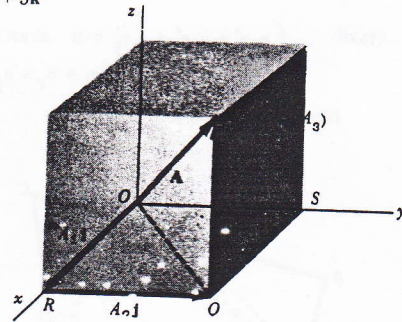
Menurut teorema Pythagoras,

$$(\overline{OP})^2 = (\overline{OQ})^2 + (\overline{QP})^2$$

di mana OP menyatakan besarnya vektor \mathbf{OP} , dan seterusnya. Begitu pula, $(\overline{OQ})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2$.

$$\text{Maka } (\overline{OP})^2 = (\overline{OR})^2 + (\overline{RQ})^2 + (\overline{QP})^2 \text{ atau}$$

$$A^2 = A_1^2 + A_2^2 + A_3^2, \text{ yang berarti } A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + A_3^2}.$$



2. Diketahui $\mathbf{r}_1 = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, carilah besarnya (a) \mathbf{r}_3 , (b) $\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3$, (c) $2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3$.

$$(a) \quad |\mathbf{r}_3| = |-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}| = \sqrt{(-1)^2 + (2)^2 + (2)^2} = 3.$$

$$(b) \quad \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3 = (3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) + (2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) + (-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$$

$$\text{Maka } |\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 + \mathbf{r}_3| = |4\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 0\mathbf{k}| = \sqrt{(4)^2 + (-4)^2 + (0)^2} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}.$$

$$(c) \quad 2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3 = 2(3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}) - 3(2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}) - 5(-\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k})$$

$$= 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k} - 6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} + 9\mathbf{k} + 5\mathbf{i} - 10\mathbf{j} - 10\mathbf{k} = 5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}.$$

$$\text{Maka } |2\mathbf{r}_1 - 3\mathbf{r}_2 - 5\mathbf{r}_3| = |5\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}| = \sqrt{(5)^2 + (-2)^2 + (1)^2} = \sqrt{30}.$$

3. Jika $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_3 = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ dan $\mathbf{r}_4 = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k}$, carilah skalar-skalar a, b, c sehingga $\mathbf{r}_4 = a\mathbf{r}_1 + b\mathbf{r}_2 + c\mathbf{r}_3$.

$$\text{Kita menghendaki } 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k} = a(2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) + b(\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}) + c(-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})$$

$$= (2a + b - 2c)\mathbf{i} + (-a + 3b + c)\mathbf{j} + (a - 2b - 3c)\mathbf{k}.$$

Karena $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ tak-koplanar maka menurut Soal 15,

$$2a + b - 2c = 3, \quad -a + 3b + c = 2, \quad a - 2b - 3c = 5.$$

Pecahkan, $a = -2$, $b = 1$, $c = -3$ dan $\mathbf{r}_4 = -2\mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 - 3\mathbf{r}_3$.

Vektor \mathbf{r}_4 dikatakan *bergantung linear* (linearly dependent) pada $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ dan \mathbf{r}_3 ; dengan perkataan lain $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{r}_3$ dan \mathbf{r}_4 membentuk sebuah himpunan vektor-vektor yang *bergantung linear*. Di pihak lain tiga buah (atau lebih kurang) vektor sebarang dari vektor-vektor ini membentuk sebuah himpunan vektor-vektor yang *bebas linear* (linearly independent).

Pada umumnya, vektor-vektor $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \dots$ disebut *bergantung linear* jika kita dapat mencari suatu him-

punan skalar-skalar a, b, c, \dots tidak semuanya nol, sehingga $a\mathbf{A} + b\mathbf{B} + c\mathbf{C} + \dots = \mathbf{0}$, jika tidak maka mereka bebas linear.

24. Carilah sebuah vektor satuan yang sejajar resultan dari vektor-vektor $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.

Resultan $\mathbf{R} = \mathbf{r}_1 + \mathbf{r}_2 = (2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 5\mathbf{k}) + (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}) = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

$$R = |\mathbf{R}| = |3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}| = \sqrt{(3)^2 + (6)^2 + (-2)^2} = 7.$$

Maka sebuah vektor satuan yang sejajar \mathbf{R} adalah $\frac{\mathbf{R}}{R} = \frac{3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - 2\mathbf{k}}{7} = \frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}$.

Periksa : $|\frac{3}{7}\mathbf{i} + \frac{6}{7}\mathbf{j} - \frac{2}{7}\mathbf{k}| = \sqrt{(\frac{3}{7})^2 + (\frac{6}{7})^2 + (-\frac{2}{7})^2} = 1.$

25. Tentukan vektor yang memiliki titik-pangkal $P(x_1, y_1, z_1)$ dan titik-terminal $Q(x_2, y_2, z_2)$ dan carilah besarnya.

Vektor kedudukan P adalah $\mathbf{r}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$.

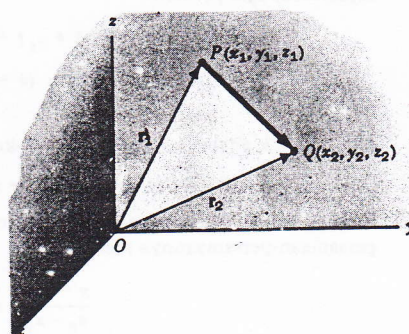
Vektor kedudukan Q adalah $\mathbf{r}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$.

$\mathbf{r}_1 + \mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2$ atau

$$\mathbf{PQ} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1 = (x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}) - (x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}) \\ = (x_2 - x_1)\mathbf{i} + (y_2 - y_1)\mathbf{j} + (z_2 - z_1)\mathbf{k}.$$

atau

Besarnya $PQ = \overline{PQ} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}.$



Perhatikan bahwa ini adalah jarak antara titik-titik P dan Q .

26. Gaya-gaya \mathbf{A} , \mathbf{B} dan \mathbf{C} yang bekerja pada sebuah obyek diberikan dalam komponen-komponennya oleh persamaan-persamaan vektor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$.

Carilah besarnya resultan gaya-gaya ini.

Gaya resultan $\mathbf{R} = \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} = (A_1 + B_1 + C_1)\mathbf{i} + (A_2 + B_2 + C_2)\mathbf{j} + (A_3 + B_3 + C_3)\mathbf{k}$.

Besarnya resultan $= \sqrt{(A_1 + B_1 + C_1)^2 + (A_2 + B_2 + C_2)^2 + (A_3 + B_3 + C_3)^2}.$

Hasil ini dapat dengan mudah diperluas untuk lebih daripada tiga-buah gaya.

27. Tentukan sudut-sudut α , β dan γ yang dibuat vektor $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ dengan arah-arah positif dari sumbu-sumbu koordinat dan perlihatkan bahwa

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Dengan melihat pada gambar, segitiga OAP adalah sebuah segitiga siku-siku dengan sudut tegak lurus di A ;

maka $\cos \alpha = \frac{x}{|\mathbf{r}|}$. Begitupula dari segitiga siku-siku

OBP dan OCP , $\cos \beta = \frac{y}{|\mathbf{r}|}$ dan $\cos \gamma = \frac{z}{|\mathbf{r}|}$. Juga

$$|\mathbf{r}| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}.$$

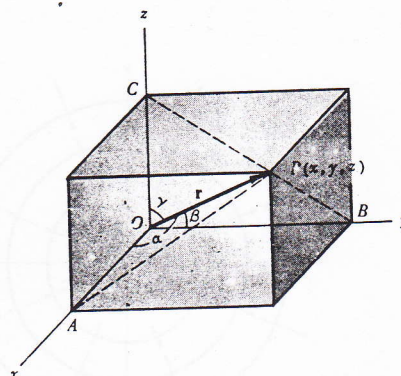
Maka $\cos \alpha = \frac{x}{r}$, $\cos \beta = \frac{y}{r}$, $\cos \gamma = \frac{z}{r}$

sehingga α, β, γ dapat diperoleh.

Dari sini diperoleh,

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{r^2} = 1.$$

Bilangan-bilangan $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ disebut *cosinus-cosinus arah* dari vektor OP .



28. Tentukan himpunan persamaan-persamaan untuk garis-garis lurus yang melalui titik-titik $P(x_1, y_1, z_1)$ dan $Q(x_2, y_2, z_2)$.

Misalkan r_1 dan r_2 adalah masing-masing vektor-vektor kedudukan dari P dan Q , dan r vektor kedudukan dari sebarang titik R pada garis yang menghubungkan P dan Q .

$$\begin{aligned} r_1 + \overrightarrow{PR} &= r & \text{atau} & \quad \overrightarrow{PR} = r - r_1 \\ r_1 + \overrightarrow{PQ} &= r_2 & \text{atau} & \quad \overrightarrow{PQ} = r_2 - r_1 \end{aligned}$$

Tetapi $\overrightarrow{PR} = t\overrightarrow{PQ}$ di mana t sebuah skalar. Maka $r - r_1 = t(r_2 - r_1)$ adalah persamaan vektor yang dikehendaki dari garis-lurus (bandingkan dengan Soal 19).

Karena $r = xi + yj + zk$, maka dalam sistem koordinat tegak-lurus kita peroleh

$$\begin{aligned} (xi + yj + zk) - (x_1i + y_1j + z_1k) &= t[(x_2i + y_2j + z_2k) - (x_1i + y_1j + z_1k)] \\ \text{atau} \quad (x - x_1)i + (y - y_1)j + (z - z_1)k &= t[(x_2 - x_1)i + (y_2 - y_1)j + (z_2 - z_1)k] \end{aligned}$$

Karena i, j, k adalah vektor-vektor tak-koplanar maka dari Soal 15 kita peroleh,

$$x - x_1 = t(x_2 - x_1), \quad y - y_1 = t(y_2 - y_1), \quad z - z_1 = t(z_2 - z_1)$$

sebagai persamaan-persamaan parameter dari garis, di mana t adalah parameternya. Eliminasi t maka persamaan-persamaannya menjadi,

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

29. Diketahui medan-skalar yang didefinisikan oleh $\phi(x, y, z) = 3x^2z - xy^3 + 5$, carilah ϕ pada titik-titik (a) $(0, 0, 0)$, (b) $(1, -2, 2)$ (c) $(-1, -2, -3)$.

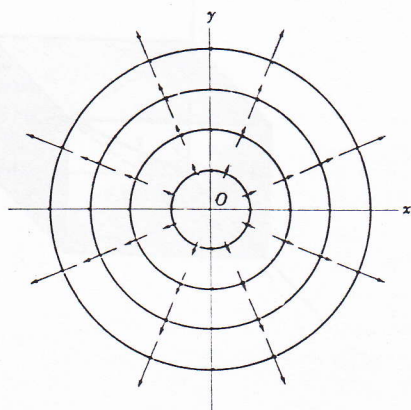
$$(a) \quad \phi(0, 0, 0) = 3(0)^2(0) - (0)(0)^3 + 5 = 0 - 0 + 5 = 5$$

$$(b) \quad \phi(1, -2, 2) = 3(1)^2(2) - (1)(-2)^3 + 5 = 6 + 8 + 5 = 19$$

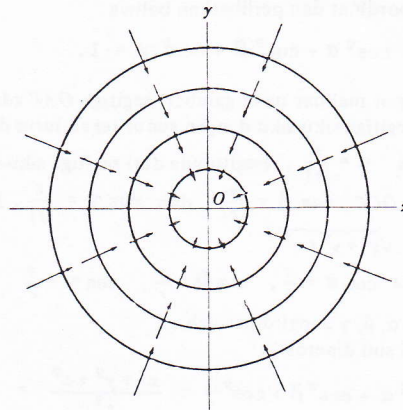
$$(c) \quad \phi(-1, -2, -3) = 3(-1)^2(-3) - (-1)(-2)^3 + 5 = -9 - 8 + 5 = -12$$

30. Buatlah diagram medan-medan vektor yang didefinisikan oleh :

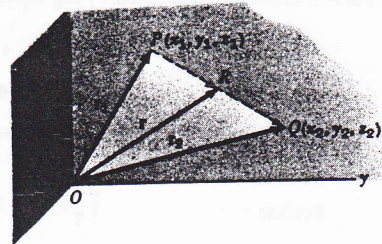
$$(a) \quad \mathbf{V}(x, y) = xi + yj, \quad (b) \quad \mathbf{V}(x, y) = -xi - yj, \quad (c) \quad \mathbf{V}(x, y, z) = xi + yj + zk.$$



Gambar (a)



Gambar (b)



(a) Pada tiap-tiap titik (x, y) kecuali $(0, 0)$, dari bidang xy didefinisikan sebuah vektor unik $xi + yj$ yang besarnya $\sqrt{x^2 + y^2}$ dengan arah yang melalui titik asal dan keluar darinya. Untuk mempermudah proses penggambaran diagramnya, perhatikan bahwa semua vektor-vektor yang berhubungan dengan titik-titik pada lingkaran-lingkaran $x^2 + y^2 = a^2$, $a > 0$ besarnya a . Medannya dengan demikian kelihatan seperti dalam Gambar (a) di mana telah dipergunakan skala yang sesuai.

(b) Di sini tiap-tiap vektor besarnya sama-dengan yang bersangkutan dengannya dalam (a) tetapi arahnya yang berlawanan. Medannya dengan demikian kelihatan seperti dalam Gambar (b).

Dalam Gamb. (a) medannya berbentuk seperti fluida yang keluar dari sebuah titik sumber O dan mengalir menurut arah yang ditunjukkan. Karena alasan ini, medannya disebut sebuah *medan-sumber* (*source field*) dan O disebut sebuah *sumber* (*source*).

Dalam Gamb. (b) medannya kelihatan mengalir menuju O , dan medannya dengan demikian disebut sebuah *medan sungap* (*sink field*) dan O disebut sebuah *sungap* (*sink*).

Dalam ruang tiga dimensi, interpretasi yang bersangkutan adalah bahwa fluidanya mengalir keluar secara radial (atau secara radial kedalam) dari sebuah garis sumber (atau garis sungap).

Medan vektornya disebut berdimensi dua karena tak bergantung pada z .

(c) Karena besarnya tiap-tiap vektor adalah $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$, maka semua titik pada permukaan bola $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$, $a^2 > 0$ memiliki vektor-vektor yang besarnya a . Medannya dengan demikian berbentuk seperti fluida yang keluar dari O dan mengalir ke segala arah dalam ruang. Ini adalah sebuah *medan sumber tiga dimensi*.

Soal-soal Tambahan

31. Manakah dari besaran-besaran berikut adalah skalar dan vektor ? (a) energi kinetik, (b) intensitas medan listrik, (c) entropi, (d) usaha, (e) gaya sentrifugal, (f) temperatur, (g) potensial gravitasi (h) muatan, (i) tegangan, (j) frekuensi.

Jawab. (a) skalar, (b) vektor, (c) skalar, (d) skalar, (e) vektor, (f) skalar, (g) skalar, (h) skalar, (i) vektor, (j) skalar.

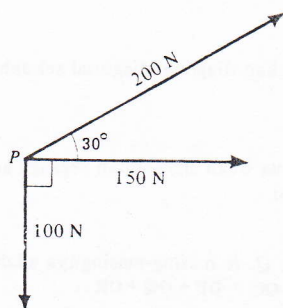
32. Sebuah pesawat-terbang menempuh jarak 200 km ke arah barat dan kemudian 150 km dalam arah 60° di sebelah utara dari barat. Tentukan pergeseran resultan (a) secara grafis, (b) secara analitis.

Jawab. besarnya 304.1 km ($50\sqrt{37}$), arahnya $25^\circ 17'$ di sebelah utara dari timur ($\arcsin 3\sqrt{111/74}$).

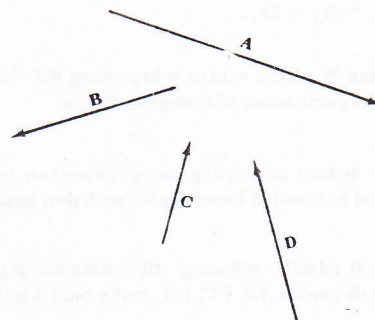
33. Carilah resultan dari perpindahan-perpindahan berikut: A, 20 km dalam arah 30° di sebelah utara dan timur; B, 50 km ke arah barat; C, 40 km ke arah timur-laut; D, 30 km ke arah 60° di sebelah selatan dari barat. Jawab. besarnya 20,9 km, arahnya $21^\circ 39'$ di sebelah selatan dari barat.

34. Perhatikan secara grafis bahwa $-(A - B) = -A + B$.

35. Pada sebuah obyek P bekerja tiga buah gaya koplanar seperti diperlihatkan dalam Gamb. (a) di bawah. Tentukan gaya yang dibutuhkan untuk mencegah P bergerak. Jawab. 323 N yang arahnya berlawanan dengan gaya 150 N.



Gamb. (a)



Gamb. (b)

36. Diketahui vektor-vektor A , B , C dan D (Gambar (b) pada halaman 13). Bentuklah

$$(a) 3A - 2B - (C - D) \quad (b) \frac{1}{2}C + \frac{2}{3}(A - B + 2D).$$

37. Jika $ABCDEF$ adalah titik-titik sudut dari sebuah segi-enam beraturan, maka carilah resultan dari gaya-gaya yang dinyatakan oleh vektor-vektor AB , AC , AD , AE dan AF . *Jawab.* $3AD$.

38. Jika A dan B adalah vektor-vektor yang diketahui, maka perlihatkan bahwa (a) $|A + B| \leq |A| + |B|$,
(b) $|A - B| \geq |A| - |B|$.

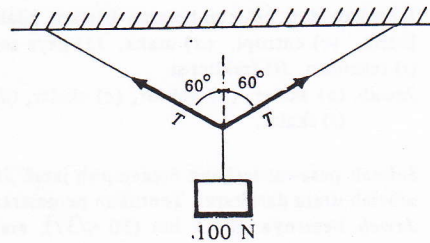
39. Perlihatkan bahwa $|A + B + C| \leq |A| + |B| + |C|$.

40. Dua buah kota A dan B terletak saling berhadapan ditepi sebuah sungai yang lebarnya 8 km dan laju aliran sungainya 4 km/jam. Seorang yang berdiam di A ingin mencapai kota C yang berada 6 km kearah udik (hulu sungai) pada tepi yang sama dengan kota B . Bila kapalnya dapat berlayar dengan laju maksimum 10 km/jam dan bila ia ingin mencapai C dalam waktu yang sesingkat mungkin, maka dalam arah manakah harus ia tempuh dan berapa lama perjalanannya?

Jawab. Arah garis-lurus ke udik yang membuat sudut $34^\circ 28'$ dengan garis tepi sungai. 1 jam 25 menit.

41. Seorang yang berjalan kearah selatan dengan laju 15 km/jam mengamati bahwa angin kelihatannya bertiup dari arah barat. Dengan menambahkan kecepatannya hingga 25 km/jam angin kelihatannya bertiup dari arah barat-daya. Carilah arah dan laju dari angin. *Jawab.* Angin bertiup dari arah $56^\circ 18'$ disebelah utara dari barat pada kelajuan 18 km/jam.

42. Sebuah beban 100 kg digantungkan pada pertengahan sebuah tali seperti diperlihatkan dalam gambar disamping. Tentukan tegangan T dalam tali. *Jawab.* 100 kg.



43. Sederhanakan $2A + B + 3C - \{A - 2B - 2(2A - 3B - C)\}$.
Jawab. $5A - 3B + C$

44. Jika a dan b adalah vektor-vektor tak-kolinear dan $A = (x + 4y)a + (2x + y + 1)b$ dan $B = (y - 2x + 2)a + (2x - 3y - 1)b$, maka carilah x dan y sehingga $3A = 2B$. *Jawab.* $x = 2, y = -1$.

45. Vektor-vektor basis a_1, a_2, a_3 dinyatakan dalam vektor-vektor basis b_1, b_2, b_3 melalui hubungan-hubungan $a_1 = 2b_1 + 3b_2 - b_3$, $a_2 = b_1 - 2b_2 + 2b_3$, $a_3 = -2b_1 + b_2 - 2b_3$

Jika $F = 3b_1 - b_2 + 2b_3$, nyatakan F dalam a_1, a_2 dan a_3 .

Jawab. $2a_1 + 5a_2 + 3a_3$.

46. Jika a, b, c adalah vektor-vektor tak-koplanar maka tentukan apakah vektor-vektor $r_1 = 2a - 3b + c$, $r_2 = 3a - 5b + 2c$, dan $r_3 = 4a - 5b + c$ adalah bebas atau bergantung linear. *Jawab.* Bergantung linear, karena $r_3 = 5r_1 - 2r_2$.

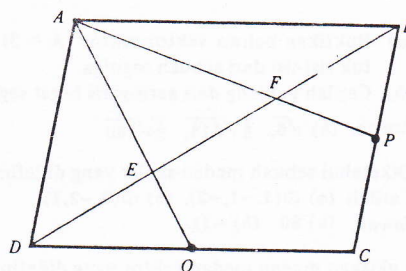
47. Jika A dan B adalah vektor-vektor yang menyatakan diagonal-diagonal sebuah jajaran-genjang, maka gambarkan jajaran-genjangnya.

48. Buktikan bahwa garis yang menghubungkan titik-titik tengah dua buah sisi sebuah segitiga adalah sejajar dengan sisi ketiga dan besarnya separuh dari besarnya sisi ketiga ini.

49. (a) Jika O adalah sebarang titik didalam segitiga ABC dan P, Q, R masing-masingnya adalah titik-titik tengah sisi-sisi AB, BC, CA , maka buktikan bahwa $OA + OB + OC = OP + OQ + OR$.

(b) Apakah hasil ini berlaku pula apabila O adalah sebarang titik di luar segitiga? Buktikan hasil jawabanmu. *Jawab.* Ya.

50. Dalam gambar disamping, $ABCD$ adalah sebuah jajargenjang dengan P dan Q adalah masing-masingnya titik-titik tengah dari sisi-sisi BC dan CD . Buktikan bahwa AP dan AQ memotong diagonal BD atas tiga bagian yang sama di titik-titik E dan F .



51. Buktikan bahwa garis-garis berat sebuah segitiga saling berpotongan pada sebuah titik yang sama yang mana adalah titik pembagi tiga garis-garis berat itu.
52. Buktikan bahwa garis-garis bagi sebuah segitiga berpotongan pada sebuah titik yang sama.
53. Perhatikan bahwa ada terdapat sebuah segitiga dengan sisi-sisi yang sama dan sejajar dengan garis-garis berat dari sebarang segitiga yang diketahui.

54. Misalkan vektor-vektor kedudukan dari titik-titik P dan Q relatif terhadap sebuah titik-asal O masing-masingnya diberikan oleh \mathbf{p} dan \mathbf{q} . Jika R adalah sebuah titik yang membagi garis PQ kedalam bagian-bagian yang perbandingannya adalah $m : n$, maka perhatikan bahwa vektor kedudukan R diberikan oleh

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{p} + n\mathbf{q}}{m + n} \quad \text{dan vektor ini tak bergantung pada titik-asal.}$$

55. Jika $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \dots, \mathbf{r}_n$ adalah berturut-turut vektor-vektor kedudukan dari massa-massa m_1, m_2, \dots, m_n relatif terhadap sebuah titik-asal O , perhatikan bahwa vektor kedudukan dari titik-beratnya diberikan oleh

$$\mathbf{r} = \frac{m_1\mathbf{r}_1 + m_2\mathbf{r}_2 + \dots + m_n\mathbf{r}_n}{m_1 + m_2 + \dots + m_n}$$

dan bahwa ini tak bergantung pada titik asal.

56. Sebuah segiempat $ABCD$ memiliki massa-massa yang besarnya 1, 2, 3 dan 4 satuan yang masing-masingnya terletak pada titik-titik sudut $A(-1, -2, 2)$, $B(3, 2, -1)$, $C(1, -2, 4)$ dan $D(3, 1, 2)$. Carilah koordinat-koordinat titik-pusat massanya. *Jawab.* $(2, 0, 2)$.

57. Perhatikan bahwa persamaan sebuah bidang yang melalui tiga buah titik A, B, C yang tak terletak pada sebuah garis-lurus dan yang memiliki vektor-vektor kedudukan $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$ relatif terhadap titik-asal O , dapat dituliskan sebagai

$$\mathbf{r} = \frac{m\mathbf{a} + n\mathbf{b} + p\mathbf{c}}{m + n + p}$$

di mana m, n, p adalah skalar-skalar. Periksa bahwa persamaan ini tak bergantung pada titik-asal.

58. Vektor-vektor kedudukan dari titik-titik P dan Q diberikan oleh $\mathbf{r}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{r}_2 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$. Tentukan PQ dalam $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ dan carilah besarnya. *Jawab.* $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 3\mathbf{k}, 7$
59. Jika $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$, carilah (a) $2\mathbf{A} - \mathbf{B} + 3\mathbf{C}$, (b) $|\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}|$, (c) $|3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}|$, (d) vektor satuan yang sejajar dengan $3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}$.

Jawab. (a) $11\mathbf{i} - 8\mathbf{k}$ (b) $\sqrt{93}$ (c) $\sqrt{398}$ (d) $\frac{3\mathbf{A} - 2\mathbf{B} + 4\mathbf{C}}{\sqrt{398}}$

60. Gaya-gaya berikut bekerja pada sebuah partikel P : $\mathbf{F}_1 = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - 5\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_2 = -5\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_3 = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{F}_4 = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, yang diukur dalam Newton. Carilah (a) resultan dari gaya-gaya. (b) besarnya resultan. *Jawab.* (a) $2\mathbf{i} - \mathbf{j}$ (b) $\sqrt{5}$

61. Dalam tiap-tiap kasus berikut, tentukan apakah vektor-vektornya bebas linear ataukah bergantung linear: (a) $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$, (b) $\mathbf{A} = \mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = 2\mathbf{i} - 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

Jawab. (a) bergantung linear, (b) bebas linear.

62. Buktikan bahwa empat-buah vektor sebarang, dalam ruang berdimensi tiga, haruslah bergantung linear.

63. Perhatikan bahwa syarat perlu dan cukup agar vektor-vektor $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = B_1\mathbf{i} + B_2\mathbf{j} + B_3\mathbf{k}$.

$\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$ bebas linear adalah bahwa determinan $\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$ tidak sama-dengan nol.

64. (a) Buktikan bahwa vektor-vektor $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$, $\mathbf{B} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$, $\mathbf{C} = 4\mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ dapat membentuk sisi-sisi dari sebuah segitiga.

(b) Carilah panjang dari garis-garis berat segitiga itu.

Jawab. (b) $\sqrt{6}$, $\frac{1}{2}\sqrt{114}$, $\frac{1}{2}\sqrt{150}$

65. Diketahui sebuah medan-skalar yang didefinisikan oleh $\phi(x, y, z) = 4yz^3 + 3xyz - z^2 + 2$.

Carilah (a) $\phi(1, -1, -2)$, (b) $\phi(0, -3, 1)$.

Jawab. (a) 36 (b) -11

66. Lukiskan medan-medan vektor yang didefinisikan oleh :

(a) $\mathbf{V}(x, y) = x\mathbf{i} - y\mathbf{j}$, (b) $\mathbf{V}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$, (c) $\mathbf{V}(x, y, z) = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$

F

H

A

A

di

su